Cuestión 0.ª.0.A

• Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=1$ si $(x,y)=(0,0)$.

Cfr. problema resuelto 1.22 (pp. 23–24) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

En cuestiones sobre continuidad, si sospechásemos de la no continuidad en un punto (x_0,y_0): • pudiésemos analizar los límites reiterados del campo en (x_0,y_0), y si resultase que son iguales y distintos a $f(x_0,y_0)$, habríamos demostrado que f no es continua en (x_0,y_0) —pues si lo fuese, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, lo que obligaría a que todos los límites reiterados en (x_0,y_0) también valiesen $f(x_0,y_0)$— (si bien este proceder presenta el inconveniente de que si todos los límites reiterados existiesen pero no tuviesen todos el mismo valor, no sabríamos nada sobre la existencia del límite, por lo que tampoco sabríamos nada sobre la continuidad de f en (x_0,y_0)); • también pudiésemos analizar las continuidades parciales en (x_0,y_0), pues si resulta discontinua parcialmente en alguna variable ya sabríamos que no es continua en (x_0,y_0) (con el inconveniente de que si resultase ser continua parcialmente en todas las variables no sabríamos nada sobre la continuidad en (x_0,y_0)).

Pero en este caso no sospechamos nada, así que procedemos de la siguiente forma:

I. esta función es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula;

II. el límite en $(0,0)$ es indeterminado $\dfrac{0}{0}$ de dos variables; expresándolo en coordenadas polares también es indeterminado $\dfrac{0}{0}$, pero de una variable: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{\underset{x^2+y^2=r^2}{=}} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{\operatorname{sen}r^2\cos r^2}{r^2} \overset{\operatorname{sen}r^2\sim_0 r^2}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^2\cos r^2}{r^2} \overset{r\neq0}{=} \lim\limits_{r\to0}\cos r^2 \overset{\cos x^2\text{ continua en }0}{=} \cos 0^2=1$;

III. como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1 \overset{\text{definición de }f}{=} f(0,0)$, la función también es continua en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. □

Observación.— Caminos alternativos para el cálculo del límite en $(0,0)$ son, entre otros:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{\operatorname{sen}(x^2+y^2)\sim_{(0,0)}x^2+y^2}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{x^2+y^2\neq0}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y^2) \overset{\cos(x^2+y^2)\text{ continua en }(0,0)}{=} \cos(0^2+0^2)=\cos 0=1$, o bien,
- $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{\operatorname{sen}r^2\cos r^2}{r^2} \overset{\operatorname{sen}2r^2=2\operatorname{sen}r^2\cos r^2}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2r^2}{r^2} \overset{\operatorname{sen}2r^2\sim_0 2r^2}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{2r^2}{2r^2} \overset{r\neq0}{=} \lim\limits_{r\to0}1=1$, o bien,
- $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}2r^2}{r^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{2}\dfrac{4r\cos 2r^2}{2r} \overset{r\neq0}{=} \lim\limits_{r\to0}\cos 2r^2 \overset{\cos 2x^2\text{ continua en }0}{=} \cos(2\cdot0^2)=1$.

Cuestión 0.ª.0.B

• Estudiemos la continuidad en $\mathbb{R}^2$ del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$.

Cfr. problema resuelto 1.26 (p. 25) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

Volvemos a no sospechar nada sobre la continuidad, así que procedemos de manera similar a como lo hicimos en la cuestión anterior:

I. Esta función es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula;

II. el límite en $(0,0)$, indeterminado $\frac{0}{0}$, lo resolvemos por infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^4-y^4)}{x^2+y^2} \overset{1-\cos(x^4-y^4)\sim_{(0,0)}\frac{1}{2}(x^4-y^4)^2}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\frac{(x^4-y^4)^2}{x^2+y^2} \overset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}{=} \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}$$
$$\overset{x^2+y^2\neq 0}{=} \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 \overset{(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2 \text{ continua en } 0}{=} (0^2+0^2)(0^2-0^2)^2 = 0;$$

III. como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \overset{\text{definición de } f}{=} f(0,0)$, la función también es continua en $(0,0)$.

Solución.— Este campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$. □

Observación.— Un camino alternativo para el cálculo del límite en $(0,0)$ es, entre otros:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\frac{(x^4-y^4)^2}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{\underset{x^2+y^2=r^2}{=}} \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\frac{r^2r^6(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2}{r^2} \overset{r\neq 0}{=} \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}r^6(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2 = \frac{1}{2}(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2\lim_{r\to 0} r^6$$
$$\overset{x^6 \text{ continua en } 0}{=} \frac{1}{2}(\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta)^2\cdot 0^6 = 0.$$

Cuestión 1.ª.1.A

- Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)=(0,0)$:
  a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
  b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
  c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?;
  d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Cfr. problema resuelto 2.9 (pp. 61–62) de: UÑA JUÁREZ, Isaías, SAN MARTÍN MORENO, Jesús, y TOMEO PERUCHA, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\frac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{f(t,0)-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^4+t^2\cdot 0-0^2}{2t^4+3\cdot 0^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{2t^5}$$
$$\overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t} \notin \mathbb{R} \text{ (no existe)};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{f(0,t)-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{0^4+0^2\cdot t-t^2}{2\cdot 0^4+3\cdot t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{3t^3}$$
$$\overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-1}{3t} \notin \mathbb{R} \text{ (no existe)};$$

en definitiva, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ no existen;

b. para $(x,y)\neq(0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(4x^3+2xy)(2x^4+3y^2)-8x^3(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2} = \frac{-4x^5y+20x^3y^2+6xy^3}{(2x^4+3y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2-2y)(2x^4+3y^2)-6y(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2} = \frac{2x^6-10x^4y-3x^2y^2}{(2x^4+3y^2)^2};$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto:

I. f no es derivable en $\mathbb{R}^2$ por no serlo en $(0,0)$;

II. f sí es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde f no es derivable, ya que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tienen por dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

d. veamos:

I. si un campo escalar es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas direccionales en dicho punto (en particular, las parciales); y es diferenciable en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto: como no existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$, no existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, por lo que f no es diferenciable en $(0,0)$, por lo que tampoco lo es en $\mathbb{R}^2$;

II. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

Cuestión 1.ª.1.B

■ Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $(0,0)$;
b. hallemos razonadamente las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
c. razonemos: ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?;
d. razonemos: ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?, ¿es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Cfr. ejemplo 2.3 (p. 34) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. En $(0,0)$ no podemos aplicar las reglas de derivación pues al existir una indeterminación $\dfrac{0}{0}$ desconocemos si el campo es derivable en dicho punto; calculémoslas por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{f(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^3} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \notin \mathbb{R} \text{ (no existe)};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{f(0,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2}{t^3} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{-1}{t} \notin \mathbb{R} \text{ (no existe)};$$

en definitiva, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ no existen;

b. para $(x,y) \neq (0,0)$, el campo es derivable por ser un cociente de funciones derivables cuyo denominador no se anula, y las derivadas parciales en este punto se obtiene por simple derivación de un cociente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2};$$

c. un campo escalar es derivable en un punto si, y sólo si, existen todas las derivadas parciales en dicho punto; y lo es en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto:

I. f no es derivable en $\mathbb{R}^2$ por no serlo en $(0,0)$;

II. f sí es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ donde f no es derivable, ya que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tienen por dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

d. veamos:

I. si un campo escalar es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas direccionales en dicho punto (en particular, las parciales); y es diferenciable en un conjunto si, y sólo si, lo es en todos los puntos de dicho conjunto; por lo tanto: como no existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$, no existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, por lo que f no es diferenciable en $(0,0)$, por lo que tampoco lo es en $\mathbb{R}^2$;

II. si un campo escalar es de clase C^1 en un conjunto, entonces es diferenciable en dicho conjunto, por lo tanto: como f es derivable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (por ser cocientes de funciones continuas cuyo denominador no se anula), f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

Cuestión 2.ª.2.A

● Hallemos las dimensiones del ortoedro de volumen 64 cm³ de superficie mínima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por sustitución directa:

a. definamos la condición/restricción y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de f;
c. discutamos utilizando la matriz hessiana de f cuáles debiesen ser las dimensiones buscadas.

Cfr. ejemplo b (pp. 85–86) de: Valderrama Bonet, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Esquema de resolución.—

a. El volumen de un ortoedro de dimensiones x, y, z, es xyz, por lo que la condición es $xyz = 64$; la superficie de dicho ortoedro es $2xy + 2xz + 2yz$; de la condición, $z = \frac{64}{xy}$, por lo que la función objetivo es $f(x,y) = 2xy + \frac{128}{x} + \frac{128}{y}$;

b. un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de f es $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2y - \frac{128}{x^2}, 2x - \frac{128}{y^2}\right)$; $\nabla f(x,y)$ no existe para puntos con $x = 0$ o $y = 0$, pero rechazamos éstos, pues no tendríamos ortoedro; de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, de $2y - \frac{128}{x^2} = 0$, tenemos $y = \frac{64}{x^2}$, que sustituyendo en $2x - \frac{128}{y^2} = 0$, obtenemos $2x - \frac{x^4}{32} = 0$, de donde $x\left(2 - \frac{x^3}{32}\right) = 0$ y, por lo tanto, $x = 0$ o $x = 4$; ya habíamos rechazado $x = 0$, por lo que el único punto crítico es $\left(4, \frac{64}{4^2}\right)$, esto es, $(4,4)$;

c. las derivadas parciales de segundo orden de f son $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{256}{x^3}$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{256}{y^3}$, que evaluadas en $(4,4)$ valen 4, 2, 4, respectivamente, por lo que el determinante hessiano de f en $(4,4)$ es $\left|Hf(4,4)\right| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$, y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) = 4 > 0$, f presenta un mínimo local estricto en $(4,4)$, en otras palabras, la superficie mínima se obtiene siendo las dimensiones $x = 4$, $y = 4$ y $z = \frac{64}{4 \cdot 4} = 4$, esto es, precisamente si el ortoedro es un cubo de lado 4. □

Cuestión 2.ª.2.B

● Hallemos las longitudes de los lados del rectángulo de perímetro dado p de área máxima; formalicémosla como una situación de optimización con restricciones de igualdad y resolvámosla por el método de los multiplicadores de Lagrange:

a. definamos la condición/restricción g y la función objetivo f que representan esta situación;
b. hallemos los puntos críticos de la lagrangiana y los puntos donde f pudiese alcanzar un extremo local;
c. verifiquemos que se satisface la condición de regularidad;
d. discutamos utilizando la matriz hessiana orlada de la lagrangiana cuáles debiesen ser las longitudes buscadas.

Cfr. problema resuelto 5.9 (pp. 143-144) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. El perímetro de un rectángulo de dimensiones x, y, es $2x + 2y$, por lo que la condición es $2x + 2y = p$; el área de dicho rectángulo es xy, por lo que la función objetivo es $f(x,y) = xy$; utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para maximizar el campo escalar $f(x,y) = xy$ sujeto a la condición/restricción $g(x,y) = 2x + 2y - p$;

b. la función lagrangiana es $\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$, esto es, $\Lambda(x,y,\lambda) = xy - \lambda(2x + 2y - p)$; un punto crítico de un campo escalar es aquél para el que el gradiente del campo se anula o no existe; el gradiente de Λ es

$\nabla\Lambda(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}(x,y,\lambda), \frac{\partial\Lambda}{\partial y}(x,y,\lambda), \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)\right) = (y-2\lambda, x-2\lambda, -2x-2y+p)$; $\nabla\Lambda(x,y,\lambda)$ no presenta problemas de existencia en $\mathbb{R}^3$; de $\nabla\Lambda(x,y,\lambda) = (0,0,0)$, de $y-2\lambda=0$ y $x-2\lambda=0$, tenemos $y=x=2\lambda$, que sustituyendo en $-2x-2y+p=0$, obtenemos $-4\lambda-4\lambda+p=0$, de donde $\lambda=\frac{p}{8}$, por lo tanto, $x=y=2\cdot\frac{p}{8}=\frac{p}{4}$, por lo que el único punto crítico de la lagrangiana es $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right)$, de donde, el único punto donde f pudiese alcanzar un extremo local es $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)$;

c. $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = (2,2)$ por lo que $\nabla g\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right) = (2,2) \neq (0{,}0)$, por lo que se satisface la condición de regularidad;

d. la matriz hessiana de la lagrangiana es $H_{(x,y)}\Lambda(x,y,\lambda) = Hf(x,y) - \lambda Hg(x,y) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, por lo que la matriz hessiana orlada de la lagrangiana en su punto crítico $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right)$ es
$H\Lambda\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4},\frac{p}{8}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \nabla g(p/4,p/4) \\ \hline \nabla g(p/4,p/4)^t & H_{(p/4,p/4)}\Lambda(p/4,p/4,p/8)\end{array}\right) = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; para averiguar el tipo de extremo local, precisamos analizar los menores principales M_k con $k=2m+1,\ldots,m+n$, con n el n.º de variables y m el n.º de condiciones/restricciones; como en la situación de estudio $n=2$ y $m=1$, sólo necesitamos calcular el único menor principal de orden 3, $\begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 8$, que resulta ser positivo, por lo que f alcanza en $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{4}\right)$ un máximo local estricto, en otras palabras, el área máxima se obtiene siendo las dimensiones $x=y=\frac{p}{4}$, esto es, precisamente si el rectángulo es un cuadrado. □

Cuestión 3.ª.3.A

• Calculemos por integración doble el volumen de la región tridimensional debajo del plano $z=2$ sobre el conjunto del plano $z=0$ definido por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, y\leq x^2, x+y-2\leq 0, x-y-1\leq 0\}$.

Cfr. ejemplo 7.4 (p. 188–189) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.— Dividimos D en dos recintos elementales de integración disjuntos, de tipo 1, en las que $f(x,y)=2$ es continua y, por tanto, integrable, a saber, $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 1, y\geq 0, y\leq x^2\}$ y $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1, x+y-2\leq 0, x-y-1\leq 0\}$; así: $V=\iint_D 2\,dx\,dy = \iint_{D_1} 2\,dx\,dy + \iint_{D_2} 2\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{x^2} 2\,dy\,dx + \int_1^{3/2}\int_{x-1}^{-x+2} 2\,dy\,dx = 2\left(\int_0^1 y\Big|_0^{x^2} dx + \int_1^{3/2} y\Big|_{x-1}^{-x+2} dx\right) = 2\left(\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^{3/2}(-x+2-x+1)\,dx\right) = 2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + (-x^2+3x)\Big|_1^{3/2}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{3^2}{2^2} + \frac{9}{2} + 1 - 3\right) = \frac{7}{6}$. □

Cuestión 3.ª.3.B

• Calculemos por integración triple el volumen del sólido tridimensional acotado, por abajo, por el plano $z=0$, por encima, por el paraboloide $z=x^2+2y$, y por los lados, por los planos $x=0$, $y=0$ y $x+y=1$.

Cfr. ejercicio 11.14 (p. 343) de: Burgos Román, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

Esquema de resolución.— $V=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+2y} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} z\Big|_{z=0}^{z=x^2+2y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2y+y^2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (x^2(1-x)+(1-x)^2)\,dx = \int_0^1(-x^3+2x^2-2x+1)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{4}+\frac{2}{3}-1+1 = \frac{5}{12}$. □

Cuestión Op.A

■ Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

Cfr. problema resuelto 1.11 (pp. 8–9) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot0}{x^2+0^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^2} \overset{x\neq0}{=} \lim\limits_{x\to0}0 = 0;$

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y^2} \overset{y\neq0}{=} \lim\limits_{y\to0}0 = 0;$

b. estudiemos los límites direccionales según las rectas $y = kx$, con $k \in \mathbb{R}$:
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2k}{x^2(1+k)} \overset{x\neq0}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{k}{1+k} = \dfrac{k}{1+k}$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino $y = kx$ por el que nos acercamos a $(0,0)$ (por añadidura, observemos que el límite direccional según $y = -x$ no existe en $\mathbb{R}$). □

Observación: para (b), un camino alternativo, entre otros, es:

- pudiésemos haber transformado a coordenadas polares:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{\underset{x^2+y^2=r^2}{=}} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^2\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta}{r^2} \overset{r\neq0}{=} \lim\limits_{r\to0}(\cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta\cdot\operatorname{sen}\theta$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares).

Cuestión Op.B

■ Del campo escalar $f(x,y) = \dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$:

a. estudiemos los límites reiterados en $(0,0)$, y
b. estudiemos el límite en $(0,0)$.

Cfr. ejemplo 1.20 (pp. 11–12) de: Uña Juárez, Isaías, San Martín Moreno, Jesús, y Tomeo Perucha, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

Esquema de resolución.—

a. $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7\cdot0^2}{2x^2+5\cdot0^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2}{2x^2} \overset{x\neq0}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2};$

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{5\cdot0^2-7y^2}{2\cdot0^2+5y^2} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{-7y^2}{5y^2} \overset{y\neq0}{=} \lim\limits_{y\to0}\dfrac{-7}{5} = \dfrac{-7}{5};$

b. como los límites reiterados de f en $(0,0)$ existen y no coinciden, no existe el límite de f en $(0,0)$. □

Observación: para (b), dos caminos alternativos, entre otros, son:

- pudiésemos haber estudiado los límites direccionales según las rectas $y = kx$, con $k \in \mathbb{R}$:
$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-7(kx)^2}{2x^2+5(kx)^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2(5-7k^2)}{x^2(2+5k^2)} \overset{x\neq0}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5-7k^2}{2+5k^2} = \dfrac{5-7k^2}{2+5k^2}$; por lo que el límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino $y = kx$ por el que nos acercamos a $(0,0)$;

- pudiésemos haber transformado a coordenadas polares:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{5x^2-7y^2}{2x^2+5y^2} \overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{5r^2\cos^2\theta-7r^2\operatorname{sen}^2\theta}{2r^2\cos^2\theta+5r^2\operatorname{sen}^2\theta} \overset{r\neq0}{=} \lim\limits_{r\to0}\dfrac{5\cos^2\theta-7\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta+5\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{5\cos^2\theta-7\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos^2\theta+5\operatorname{sen}^2\theta}$; por lo que el

límite de f en $(0,0)$ no existe ya que su valor depende del camino por el que nos acercamos a $(0,0)$ (esta vez expresado en coordenadas polares).

Para saber más

BURGOS ROMÁN, Juan de, *Cálculo infinitesimal: definiciones, teoremas y resultados*, Las Rozas, Madrid (ES-MD), España: García-Maroto, 2006, edición estudiante, ISBN: 84-934785-5-5.

UÑA JUÁREZ, Isaías, SAN MARTÍN MORENO, Jesús, y TOMEO PERUCHA, Venancio, *Problemas resueltos de cálculo en varias variables*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Thomson, 2007, ISBN: 978-84-9732-290-4.

VALDERRAMA BONET, Mariano José, *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*, Madrid, Madrid (ES-MD), España: Pirámide, 1995, ISBN: 84-368-0902-5.

Es muy recomendable el estudio de estos textos para el aprendizaje de la teoría y práctica del cálculo diferencial e integral de varias variables.